1^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

1.

Έστω η εξίσωση

$(k^2-5k+4)x^2-(k-1)x+1=0$

i) Να βρείτε την τιμή του k ώστε η εξίσωση να έχει μία μόνο ρίζα την οποία ρίζα να προσδιορίσετε

ii) Να βρείτε την τιμή του k ώστε η εξίσωση να έχει μία ρίζα διπλή την οποία ρίζα να προσδιορίσετε

iii) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

Λύση

i)

Για να έχει η εξίσωση μία μόνο ρίζα θα πρέπει να είναι πρώτου βαθμού δηλαδή πρέπει

$k^2-5k+4=0 \Leftrightarrow k=1$ ή $k=4$

αν $k=1$ η εξίσωση γίνεται

$0x=-1$ η οποία είναι αδύνατη

ενώ αν $k=4$ η εξίσωση γίνεται

$-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

ii)

Για να έχει η εξίσωση μία διπλή ρίζα θα πρέπει

$k^2-5k+4\neq 0$ και η διακρίνουσα Δ να είναι ίση με το 0 δηλαδή πρέπει

$k^2-5k+4\neq 0$ και $(k-1)^2-4(k^2-5k+4)=0$

$(k\neq 1$ και $k\neq 4)$ και $(k=1$ ή $k=5) \Leftrightarrow k=5$

iii)

Θα πρέπει $k^2-5k+4\neq 0$ και $\Delta>0$

όμως $k^2-5k+4\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 1$ και $k\neq 4$

και $\Delta>0 \Leftrightarrow$

$(k-1)^2-4(k^2-5\kappa+4)>0 \quad \Leftrightarrow$

$(k-1)(-3k+15)>0 \quad \Leftrightarrow 1<k<5$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες όταν

$1<k<5$ με $k\neq 4$

2.

i) Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{5|x|+1}{3}-\frac{4|x|+3}{3}=\frac{5|x|+4}{6}-2$$

ii) Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{2|x-2|-6}{4}-\frac{2+|2-x|}{3}<1-3|x-2|$$

Λύση

i)

$$\frac{5|x|+1}{3}-\frac{4|x|+3}{3}=\frac{5|x|+4}{6}-2 \quad \Leftrightarrow$$

$$6\cdot\frac{5|x|+1}{3}-6\cdot\frac{4|x|+3}{3}=6\cdot\frac{5|x|+4}{6}-6\cdot 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2(5|x|+1)-2(4|x|+3)=5|x|+4-12 \quad \Leftrightarrow$$

$$|x|=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{3}$$

ii)

Επειδή οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές έχουμε

$|2-x|=|x-2|$ και η ανίσωση γίνεται

$$\frac{2|x-2|-6}{4}-\frac{2+|x-2|}{3}<1-3|x-2| \quad \Leftrightarrow$$

$$12\cdot\frac{2|x-2|-6}{4}-12\cdot\frac{2+|x-2|}{3}<12-36|x-2| \quad \Leftrightarrow$$

$$|x-2|<1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1<x-2<1 \Leftrightarrow 2-1<x<2+1 \Leftrightarrow 1<x<3$$

3.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ο δέκατος πέμπτος όρος είναι ίσος με 38 και η διαφορά της προόδου είναι 3

i) Να ορίσετε την πρόοδο

ii) Να βρείτε τα S_{15} και S_{53}

Λύση

i)

Για να ορίσουμε την πρόοδο πρέπει να βρούμε τον α_1

από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ για $\nu = 15$

έχουμε

$\alpha_{15} = \alpha_1 + (15-1)\omega \quad \Leftrightarrow$

$38 = \alpha_1 + 14 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = -4$.

ii)

$$S_{15} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_{15}) \cdot 15}{2} =$$

$$= \frac{(-4+38) \cdot 15}{2} = 255$$

$$S_{53} = \frac{[2\alpha_1 + (53-1)\omega] \cdot 53}{2} =$$

$$= \frac{(-8+52 \cdot 3) \cdot 53}{2} = 3922$$

4.

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{5}{8}$ και $P(B)=P(A')$.

i) Αν τα A', B είναι ασυμβίβαστα, να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα και τα A, B

ii) Δείξτε ότι $P(A\cup B)=\frac{5}{8}$ και ότι $P(A'\cap B')=\frac{3}{8}$.

Λύση

i)

Αφού A' και B ασυμβίβαστα θα ισχύει

$B\cap A'=\varnothing \Leftrightarrow$

$P(B\cap A')=0 \Leftrightarrow$

$P(B)-P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow$

$P(A\cap B)=P(B) \Leftrightarrow$

$P(A\cap B)=P(A') \Leftrightarrow$

$P(A\cap B)=1-P(A)=\frac{3}{8}\neq 0$

Άρα τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

ii)

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{5}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(A'\cap B')=P(A')-P(A'\cap B) = P(A')-P(B)+P(A\cap B) = \frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$

5.

i) Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του α η εξίσωση $(\alpha^2 - 2\alpha - 35)x = \alpha + 5$

ii) Όταν η εξίσωση του **(i)** ερωτήματος είναι αδύνατη να βρεθούν οι τιμές του k ώστε η εξίσωση $(\alpha - 6)x^2 - (k - \alpha)x + (k - 1)^2 = 0$ να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

Λύση

i)

- Αν $\alpha^2 - 2\alpha - 35 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 7$ και $\alpha \neq -5$ τότε

η εξίσωση έχει μία μόνο λύση την

$$x = \frac{\alpha + 5}{\alpha^2 - 2\alpha - 35} = \frac{\alpha + 5}{(\alpha + 5)(\alpha - 7)} = \frac{1}{\alpha - 7}$$

- Αν $\alpha^2 - 2\alpha - 35 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7$ ή $\alpha = -5$ τότε

για $\alpha = 7$ η εξίσωση γίνεται

$0x = 12$ η οποία είναι αδύνατη

Ενώ για $\alpha = -5$ η εξίσωση γίνεται

$0x = 0$ η οποία είναι αόριστη

ii)

Όταν $\alpha = 7$ η εξίσωση $(\alpha - 6)x^2 - (k - \alpha)x + (k - 1)^2 = 0$ γίνεται

$x^2 - (k - 7)x + (k - 1)^2 = 0$ της οποίας η διακρίνουσα Δ είναι

$\Delta = (k - 7)^2 - 4(k - 1)^2 = -3k^2 - 6k + 45$

οπότε η εξίσωση θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow -3k^2 - 6k + 45 > 0$

Οι ρίζες του τριώνυμου $-3k^2 - 6k + 45$ είναι $k = -5$ και $k = 3$

το πρόσημο του τριώνυμου $-3k^2 - 6k + 45$ φαίνεται στο πίνακα

k	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $\Delta > 0 \Leftrightarrow -5 < k < 3$

6.

i) Αν $\alpha^2 - 2(5\alpha + 2\beta) + 29 + \beta^2 = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β

ii) Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 2$

α) να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \alpha x^2 - (\alpha + \beta + 1)x + 3$ διέρχεται από τα σημεία Α(2, 7) και Β(1, 0)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημαία Α και Β

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι χαμηλότερα από την ευθεία ΑΒ

Λύση

i)

$\alpha^2 - 2(5\alpha + 2\beta) + 29 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 10\alpha - 4\beta + 29 + \beta^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 10\alpha + 25 - 4\beta + 4 + \beta^2 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha - 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\alpha - 5 = 0$ και $\beta - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta = 2$

ii)

Για $\alpha = 5$ και $\beta = 2$ έχουμε ότι $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$

α) $f(2) = 7$ και $f(1) = 0$ άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(2, 7) και Β(1, 0)

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(2, 7) και Β(1, 0) έχουμε

$7 = 2\alpha + \beta$ και $0 = \alpha + \beta$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε

$\alpha = 7$ και $\beta = -7$ επομένως

η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$y = 7x - 7$

γ) Θα πρέπει να ισχύει $5x^2 - 8x + 3 < 7x - 7 \Leftrightarrow$

$5x^2 - 15x + 10 < 0$ γνωστή διαδικασία

$1 < x < 2$

7 .

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x) = \sqrt{\ |x-1|-4} + \sqrt{3-|2x+7|}$

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $M(-4\ ,\ \alpha-\sqrt{2}\ )$

Λύση

i)

Θα πρέπει να ισχύει

$|x-1|\ -4 \geq 0$ και $3-|2\ x+7| \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$|x-1| \geq 4$ και $|2\ x+7| \leq 3 \quad \Leftrightarrow$

$(\ x-1 \leq -4$ ή $x-1 \geq 4\ )$ και $-3 \leq 2\ x+7 \leq 3 \quad \Leftrightarrow$

$(x \leq -3$ ή $x \geq 5\ )$ και $-5 \leq x \leq -2 \quad \Leftrightarrow -5 \leq x \leq -3$ άρα

Το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα

$A = [\,-5\ ,\ -3\,]$

ii)

Θα πρέπει να ισχύει

$f(-4\ ) = \alpha - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{\ |-4-1|-4} + \sqrt{3-|-8+7|} = \alpha - \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$1+\sqrt{2} = \alpha - \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = 1 + 2\sqrt{2}$$

8.

i) Να βρείτε την τιμή του x έτσι ώστε οι αριθμοί: $x-4,\quad x+4,\quad 3x-4$

με την σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

ii) Αν ο $x + 4$ είναι ο έκτος όρος της προόδου του **(i)** ερωτήματος, να βρείτε το πρώτο όρο της προόδου αυτής

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

i)

Θα πρέπει να ισχύει

$2(x + 4) = (x-4) + (3x-4) \Leftrightarrow$

$2x + 8 = x-4 + 3x-4 \qquad \Leftrightarrow x = 8$

ii)

Για $x = 8$ έχουμε

$x-4 = 4$ και $x + 4 = 12$ οπότε

η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 12-4 = 8$ τότε

$\alpha_6 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega = 12 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 + 40 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 = -28$

iii)

Από τον τύπο $S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2}$ με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

$S_{10} = \dfrac{[2(-28) + 9\cdot 8]10}{2} = 80$

9.

Έστω Α , Β δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω
με $P(A) = 0{,}7$ και $P(B) = 0{,}8$.
i) Εξετάστε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα
ii) Δείξτε ότι $0{,}5 \le P(A \cap B) \le 0{,}7$
iii) Δείξτε ότι $P(A \cup B)' \le 0{,}2$

Λύση

i) Έστω ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα τότε

$A \cap B = \varnothing$ οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}7 + 0{,}8 = 1{,}5$

δηλαδή

$P(A \cup B) = 1{,}5 > 1$

πράγμα που είναι άτοπο διότι η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχόμενου είναι ≤ 1

οπότε τα Α , Β δεν είναι ασυμβίβαστα .

ii) $0{,}5 \le P(A \cap B) \le 0{,}7$

α) $P(A \cap B) \le 0{,}7 \Leftrightarrow P(A \cap B) \le P(A)$

πράγμα που ισχύει αφού $(A \cap B) \subseteq A$

β) $P(A \cap B) \ge 0{,}5 \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge 0{,}5 \Leftrightarrow$

$0{,}7 + 0{,}8 - P(A \cup B) \ge 0{,}5 \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) \le 1$ η οποία είναι αληθής .

10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$

i) Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x - 3$

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι ψηλότερα από την ευθεία $y = x - 3$

Λύση

i) Έχουμε $\alpha = 1 > 0$, $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = 2$ και $f(2) = -1$

η μονοτονία της συνάρτησης φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\searrow$	|	$\nearrow$

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty , 2\,]$ και

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\,2, +\infty)$

παρουσιάζει για $x = 2$ ελάχιστο το $f(2) = -1$

ii) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y = x - 3$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $y = f(x)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x - 3 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

οπότε τα σημεία τομής είναι τα

$A(2\,, -1)$ και $B(3\,, 0)$

iii) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ψηλότερα από την ευθεία $y = x - 3$ στα διαστήματα εκείνα των τιμών του x για τα οποία ισχύει

$$f(x) > y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > x - 3 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 5x + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow x < 2 \text{ ή } x > 3$$